УДК 518.948

НЕЛОКАЛЬНЫЙ ГРАДИЕНТНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА-КРАСНОСЕЛЬСКОГО ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Жук Е.А., Мадорский В.М.
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест
Научный руководитель – Мадорский В.М., к. ф.- м. н., доцент

Для решения нелинейных уравнений

$$F(x) = \|f(x)+g(x)\|^2 = 0; \qquad (1)$$

$$f(D\subset R^n \to R^n),\ g(D\subset R^n \to R^n),\ f\in C_D^{(1)},\ g\in C_D$$

применим следующий нелокальный вариант метода минимальных невязок:

Шаг 1. Находим x_{n+1} по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n \frac{\|f(x_n)+g(x_n)\|^2 \bar{f}'(x_n)[f(x_n)+g(x_n)]}{\|\bar{f}'(x_n)[f(x_n)+g(x_n)]\|^2},\ PF'(x_n) = \bar{f}'(x_n)[f(x_n)+g(x_n)]. \qquad (2)$$

Здесь P – оператор проектирования на дифференцируемую часть оператора F.

Шаг 2. Проверяем выполнение условия

$$\|F(x_{n+1})\| \le \varepsilon, \qquad (3)$$

где ε – малая величина (параметр останова).

Если условие выполняется, то конец просчетов, иначе

Шаг 3. Производим пересчет шаговой длины по формуле

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\beta_n\|f(x_n)+g(x_n)\|^2}{\|f(x_{n+1})+g(x_{n+1})\|^2}\right),\ \beta_0\in[10^{-3};10^{-1}]. \qquad (4)$$

и переходим на шаг 1.

Потребуем, чтобы в интересующей нас области D операторы f и g удовлетворяли условиям:

$$\|\beta_{n+1}g(x_{n+1})-\beta_n g(x_n)\| \le \beta_n L\|\Delta x_n\|, \quad \frac{1}{\|PF(x_n)\|}\le B, \quad \|PF(x)-PF(y)\|\le K\|x-y\|\ \forall x,y\in D.$$

Теорема 1. Пусть в области $D=\bar{S}\left(x_0, \frac{B\|f(x_0)+g(x_0)\|}{1-q_0}\right)$ существует x^* – решение уравнения (1), операторы f и g удовлетворяют перечисленным выше условиям, начальное приближение x_0 и шаговая длина β_0 такова, что

$$\varepsilon_0 = \beta_0(KB^2+LB)\cdot\|f(x_0)+g(x_0)\|<1,$$

тогда алгоритм (2) – (4) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к $x^*\in D=\bar{S}(x_0,r),\ r=\frac{BF(x_0)}{1-q_0}$ и справедлива оценка погрешности

$$\|x^*-x_n\| \le BF(x_0)\frac{q_0^n}{1-q_0},\quad q_0 = 1-\beta_0(1-\varepsilon_0) \qquad (5)$$

Доказательство

Используя идеи работы [2] и свойства проекционного оператора, вполне аналогично тому, как это было доказано в теореме 3.1 [2], покажем монотонное убывание последовательности *{q_n}*, то есть релаксационность процесса (2) – (4), монотонное возрастание последовательности итерационных параметров $\{\beta_i\}$ к 1, сильную сходимость итерационного процесса к решению x^*. Далее переходом к пределу в (4) при $n \to \infty$ доказывается, что, начиная с некоторого номера k, для всех $i \geq k$ все $\beta_i \equiv 1$, откуда простыми преобразованиями легко выводится локальная квадратичная сходимость итерационного процесса (2) – (4). Стандартными рассуждениями легко показать, что все последовательные приближения не выходят за пределы замкнутой сферы $\bar{S}(x_0, r)$ и имеет место оценка (5).

Ниже предлагается ещё один весьма эффективный итерационный процесс, в котором шаг (3) имеет вид:

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\gamma_n \| f(x_n) + g(x_n) \|^2}{\beta_n \| f(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) \|^2}),\ \beta_0 \in [10^{-3}; 10^{-1}]. \qquad (6)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}\gamma_n \| f(x_n) + g(x_n) \|^2}{\beta_n \| f(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) \|^2},\ \gamma_0 = \beta_0^2. \qquad (7)$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда итерационный процесс (2) – (3), (6) – (7) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^* – решению уравнения (1) и справедлива оценка погрешности (5).

Доказательство

Используя идеи работы [2], доказываем релаксационность процесса (2) – (3), (6) – (7). Далее проверяем выполнимость характеристического условия

$$\beta_n \| f(x_n) + g(x_n) \|^2 = \beta_{n+1} \| f(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) \|^2 .$$

Доказываем слабую, а затем и сильную сходимость последовательности $\{x_n\}$ к решению уравнения (1), монотонное возрастание шаговых длин на каждом шаге итерационного процесса, а также доказываем, что существует такой номер итерации m, что для всех $i \geq m$ значения итерационных параметров β_i становятся равными единице. Стандартным образом доказывается локальная квадратичная сходимость итерационного процесса (2) – (3), (6) – (7).

Вычислительный эксперимент на рассмотренной ниже нелинейной системе с недифференцируемым оператором показал высокую эффективность итерационного процесса (2) – (3), (6) – (7).

Численный эксперимент и его обсуждение

Рассматривается система нелинейных уравнений с недифференцируемым оператором:

$$F(x) = \begin{cases} |x_1| + x_2^2 + x_3 + x_4 - c_1 = 0, \\ x_1 + |x_2| + x_3^5 - x_4 - c_2 = 0, \\ x_1^3 + 2x_2 + |x_3| + x_4 - c_3 = 0, \\ x_1^2 + |x_2| + 5x_3 + x_4 - c_4 = 0. \end{cases}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 -некоторые постоянные.

Система решается методом (2)-(4) с произвольных начальных приближений. Ниже приводится окно программы (рисунок 1).

В результате эксперимента с различными правыми частями (соответственно с различными точными решениями) показана эффективность предлагаемого метода. Результаты эксперимента сведены в таблицу. Точность решения по норме невязки 1E-10. Менялся отрезок [a;b], из которого случайным образом выбиралось начальное приближение.

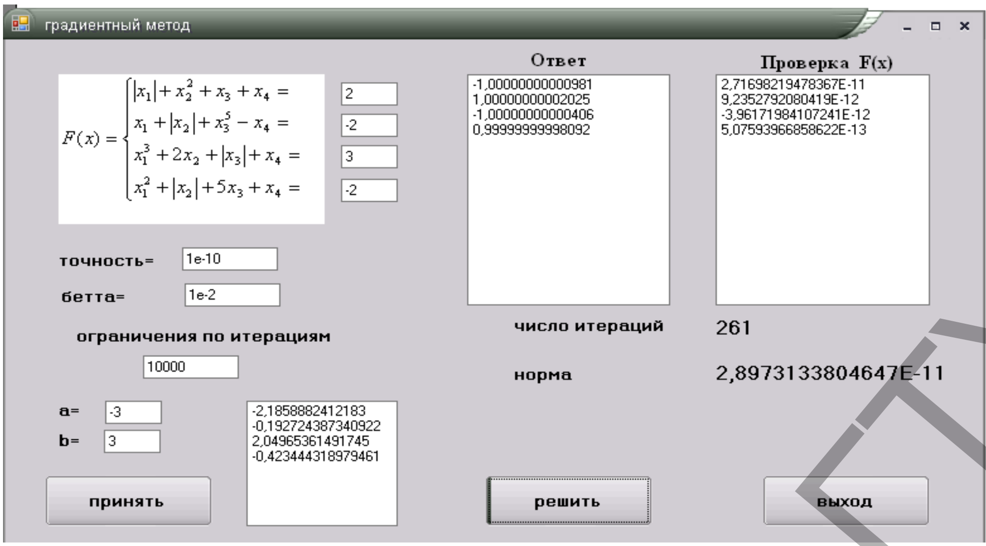

Рисунок 1

Таблица – Связь между начальным приближением и эффективностью итерационного процесса

Одно из точн. реш-й / [a;b]	Количество успешных запусков из 10			
	(-1; 1; 1; 1)	(-1; 1; -1; 1)	(-1; 1; -1;-1)	(-1; -1; -1; -1)
[0;1]	10	10	10	10
[-3;3]	10	10	10	10
[-10;10]	10	10	9	10
[-30;30]	8	8	7	8

Вывод: анализ таблицы показывает, что предложенный метод позволяет довольно успешно решать системы нелинейных уравнений с недифференцируемым оператором и чем меньше отрезок, из которого берётся начальное приближение, тем эффективнее работает метод.

Заявленная точность 1E-10 являлась тестовой, однако, как показывает вычислительный эксперимент, точность решения может быть значительно повышена.

Список цитированных источников

1. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
2. Мадорский В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174 с.

УДК 519.6+517.983

РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА ПРИ ПОМОЩИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕДУР С АПОСТЕРИОРНЫМ ВЫБОРОМ ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ

Зданевич М.В., Улезло Р.Ю.
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест
Научный руководитель – Матысик О.В., к. ф.- м. н., доцент

1. Правило останова по невязке. В гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода $Ax = y$ с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A,